गणित

(पाठ – 4) (सारणिक)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 4.1

प्रश्न 1 से 2 तक में सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए

प्रश्न 1:

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

उत्तर 1:

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$ R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$= 2 \times (-1) - 4 \times (-5) = -2 + 20 = 18$

प्रश्न 2:

(i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

उत्तर 2:

(i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta \times \cos\theta - \sin\theta \times (-\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

(ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix} = (x^2 - x + 1) \times (x + 1) - (x - 1) \times (x + 1)$

$= x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 - (x^2 + x - x - 1)$

$= x^3 - x^2 + 2$

प्रश्न 3:

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$

उत्तर 3:

$|2A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$ R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$= 2 \times 4 - 4 \times 8 = 8 - 32 = -24$ ... (1)

$4|A| = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$= 4(1 \times 2 - 2 \times 4) = 4(-6) = -24$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से, $|2A| = 4|A|$

प्रश्न 4:

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए $|3A| = 27|A|$

उत्तर 4:

$|3A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$ R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$= 3(36 - 0) - 0(0 - 0) + 1(0 - 0) = 108$ ... (1)

$27|A| = 27\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$= 27\{1(4 - 0) - 0(0 - 0) + 1(0 - 0)\} = 27(4) = 108$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से, $|3A| = 27|A|$

प्रश्न 5:
निम्नलिखित सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **(iii)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ **(iv)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

उत्तर 5:

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$= 3(0-5) + 1(0+3) - 2(0-0) = -15 + 3 - 0 = -12$

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$= 3(1+6) + 4(1+4) + 5(3-2) = 21 + 20 + 5 = 46$

(iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$= 0(0+9) - 1(0-6) + 2(-3-0) = 0 + 6 - 6 = 0$

(iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$= 2(0-5) + 1(0+3) - 2(0-6) = -10 + 3 + 12 = 5$

प्रश्न 6:

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ हो, तो $|A|$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 6:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{vmatrix}$ R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$= 1(-9+12) - 1(-18+15) - 2(8-5) = 3 + 3 - 6 = 0$

प्रश्न 7:

x के मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

उत्तर 7:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$

$\Rightarrow 2 - 20 = 2x^2 - 24 \qquad \Rightarrow x^2 = 3 \qquad \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

(ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow 10 - 12 = 5x - 6x \qquad \Rightarrow -2 = -x \qquad \Rightarrow x = 2$

प्रश्न 8:

यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x बराबर है:

(A) 6 (B) ± 6 (C) -6 (D) 0

उत्तर 8:

$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow x^2 - 36 = 36 - 36$

$\Rightarrow x^2 = 36$

$\Rightarrow x = \pm 6$

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(पाठ – 4) (सारणिक)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 4.2

बिना प्रसरण किए और सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्लिखित प्रश्न 1 से 5 को सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 1:

$$\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर 1:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a & a & x+a \\ y+b & b & y+b \\ z+c & c & z+c \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1 + C_2 \text{ द्वारा}]$$

$$= 0 = \text{RHS} \quad [\because C_1 = C_3]$$

प्रश्न 2:

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर 2:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= 0 = \text{RHS} \quad \left[\because \text{ स्तम्भ } C_1 \text{ का प्रत्येक अवयव शून्य है।}\right]$$

प्रश्न 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर 3:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 63 \\ 3 & 8 & 72 \\ 5 & 9 & 81 \end{vmatrix} \quad [C_3 \to C_3 - C_1 \text{ द्वारा}]$$

$$= 9\begin{vmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 3 & 8 & 8 \\ 5 & 9 & 9 \end{vmatrix} \quad \left[C_3 \text{ से 9 उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= 0 = \text{RHS} \quad [\because C_2 = C_3]$$

प्रश्न 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर 4:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & bc & ab+bc+ca \\ 1 & ca & ab+bc+ca \\ 1 & ab & ab+bc+ca \end{vmatrix} \quad [C_3 \to C_3 + C_2 \text{ द्वारा}]$$

$= (ab + bc + ca)\begin{vmatrix} 1 & bc & 1 \\ 1 & ca & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{vmatrix}$ $[C_3$ से $(ab + bc + ca)$ उभयनिष्ठ लेने पर$]$

$= 0 = \text{RHS}$ $[\because\ C_1 = C_3]$

प्रश्न 5:

$$\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$$

उत्तर 5:

$\text{LHS} = \begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2c & 2r & 2z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$ $[R_1 \to R_1 + R_2 - R_3$ द्वारा$]$

$= 2\begin{vmatrix} c & r & z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$ $[R_1$ से 2 उभयनिष्ठ लेने पर$]$

$= 2\begin{vmatrix} c & r & z \\ a & p & x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$ $[R_2 \to R_2 - R_1$ द्वारा$]$

$= 2\begin{vmatrix} c & r & z \\ a & p & x \\ b & q & y \end{vmatrix}$ $[R_3 \to R_3 - R_2$ द्वारा$]$

$= -2\begin{vmatrix} a & p & x \\ c & r & z \\ b & q & y \end{vmatrix}$ $[R_1 \leftrightarrow R_2$ द्वारा$]$

$= 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = \text{RHS}$ $[R_2 \leftrightarrow R_3$ द्वारा$]$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके प्रश्न 6 से 14 तक को सिद्ध कीजिए:

प्रश्न 6:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर 6:

$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -ab & 0 & -bc \\ ab & ac & 0 \end{vmatrix}$ $[R_2 \to bR_2$ तथा $R_3 \to aR_3$ द्वारा$]$

$= \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & ac & -bc \\ ab & ac & 0 \end{vmatrix}$ $[R_2 \to R_2 + R_3$ द्वारा$]$

$= ab(-abc + abc)$ $[C_1$ के अनुदिश प्रसरण करने पर$]$

$= ab(0) = 0 = RHS$

प्रश्न 7:

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

उत्तर 7:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix} \left[C_1, C_2, C_3 \text{ से } a, b, c \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= a^2b^2c^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \left[R_1, R_2, R_3 \text{ से } a, b, c \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad [C_1 \to C_1 + C_2 \text{ द्वारा}]$$

$$= a^2b^2c^2\{2(1+1)\} \qquad \left[C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$$

$$= 4a^2b^2c^2 = \text{RHS}$$

प्रश्न 8:

(i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

उत्तर 8:

(i) $\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3 \text{ द्वारा}]$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad \left[R_1 \text{ से } a-b,\ R_2 \text{ से } b-c \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (a-b)(b-c)\{1(b+c-a-b)\} \quad \left[C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a) = \text{RHS}$$

(ii) $\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix} [C_1 \to C_1 - C_2, C_2 \to C_2 - C_3 \text{ द्वारा}]$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$\left[C_1 \text{ से } a-b,\ C_2 \text{ से } b-c \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (a-b)(b-c)\{1(b^2+bc+c^2) - (a^2+ab+b^2)\} \quad \left[R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$$

$$= (a-b)(b-c)\{c^2 - a^2 + bc - ab\}$$
$$= (a-b)(b-c)\{(c-a)(c+a) + b(c-a)\}$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a)\{c+a+b\}$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = \text{RHS}$$

प्रश्न 9:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

उत्तर 9:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & xyz \\ y^2 & y^3 & xyz \\ z^2 & z^3 & xyz \end{vmatrix} \quad [R_1 \to xR_1, R_2 \to yR_2, R_3 \to zR_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= xyz\begin{vmatrix} x^2 & x^3 & 1 \\ y^2 & y^3 & 1 \\ z^2 & z^3 & 1 \end{vmatrix} \quad \left[C_3 \text{ से } xyz \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= xyz\begin{vmatrix} x^2-y^2 & x^3-y^3 & 0 \\ y^2-z^2 & y^3-z^3 & 0 \\ z^2 & z^3 & 1 \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= xyz(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} x+y & x^2+xy+y^2 & 0 \\ y+z & y^2+yz+z^2 & 0 \\ z^2 & z^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$\left[R_1 \text{ से } x-y,\ R_2 \text{ से } y-z \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$

$$= xyz(x-y)(y-z)\{(x+y)(y^2+yz+z^2)-(y+z)(x^2+xy+y^2)\}$$

$\left[C_3 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$

$$= xyz(x-y)(y-z)\{xy^2+xyz+xz^2+y^3+y^2z+yz^2-(x^2y+xy^2+y^3+x^2z+xyz+y^2z)\}$$
$$= xyz(x-y)(y-z)\{xz^2+yz^2-x^2y-x^2z\}$$
$$= xyz(x-y)(y-z)\{xz^2-x^2z+yz^2-x^2y\}$$
$$= xyz(x-y)(y-z)\{xz(z-x)+y(z^2-x^2)\}$$
$$= xyz(x-y)(y-z)(z-x)\{xz+y(z+x)\}$$
$$= (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx) = \text{RHS}$$

प्रश्न 10:

(i) $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

(ii) $\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

उत्तर 10:

(i) LHS $= \begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 5x+4 & 2x & 2x \\ 5x+4 & x+4 & 2x \\ 5x+4 & 2x & x+4 \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= (5x+4)\begin{vmatrix} 1 & 2x & 2x \\ 1 & x+4 & 2x \\ 1 & 2x & x+4 \end{vmatrix} \quad \left[C_1 \text{ से } 5x+4 \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (5x+4)\begin{vmatrix} 0 & x-4 & 0 \\ 0 & 4-x & x-4 \\ 1 & 2x & x+4 \end{vmatrix} \qquad [R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3 \text{ द्वारा}]$$

$= (5x+4)\{(x-4)(x-4) - (4-x)0\}$ $\left[C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$

$= (5x+4)(4-x)^2 = \text{RHS}$

(ii) $\text{LHS} = \begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3y+k & y & y \\ 3y+k & y+k & y \\ 3y+k & y & y+k \end{vmatrix} \qquad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= (3y+k)\begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 1 & y+k & y \\ 1 & y & y+k \end{vmatrix} \qquad \left[C_1 \text{ से } 3y+k \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (3y+k)\begin{vmatrix} 0 & -k & 0 \\ 0 & k & -k \\ 1 & y & y+k \end{vmatrix} \qquad [R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3 \text{ द्वारा}]$$

$= (3y+k)\{(-k)(-k) - (k)0\}$ $\left[C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$

$= (3y+k)k^2 = \text{RHS}$

प्रश्न 11:

(i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

(ii) $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(\ \ + y + z)^3$

उत्तर 11:

(i) $\text{LHS} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad [R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad \left[R_1 \text{ से } a+b+c \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b+c & -a-b-c & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad [C_1 \to C_1 - C_2, C_2 \to C_2 - C_3 \text{ द्वारा}]$$

$= (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 0\}$ $\left[R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$

$= (a+b+c)^3 = \text{RHS}$

(ii) $\text{LHS} = \begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2(x+y+z) & x & y \\ 2(x+y+z) & y+z+2x & y \\ 2(x+y+z) & x & z+x+2y \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= 2(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y+z+2x & y \\ 1 & x & z+x+2y \end{vmatrix} \quad \left[C_1 \text{ से } 2(x+y+z) \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= 2(x+y+z)\begin{vmatrix} 0 & -(x+y+z) & 0 \\ 0 & x+y+z & -(x+y+z) \\ 1 & x & z+x+2y \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= 2(x+y+z)\{(x+y+z)^2 - 0\} \quad \left[C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$$

$$= 2(x+y+z)^3 = \text{RHS}$$

प्रश्न 12:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$$

उत्तर 12:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & x & x^2 \\ 1+x+x^2 & 1 & x \\ 1+x+x^2 & x^2 & 1 \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= (1+x+x^2)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix} \quad \left[C_1 \text{ से } 1+x+x^2 \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (1+x+x^2)\begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-x \\ 0 & 1-x^2 & x-1 \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= (1+x+x^2)(1-x)^2\begin{vmatrix} 0 & -1 & -x \\ 0 & 1+x & -1 \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix} \quad \left[R_1 \text{ से } 1-x,\ R_2 \text{ से } 1-x \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (1+x+x^2)(1-x)^2\{1+x(1+x)\} \quad \left[C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$$

$$= (1+x+x^2)(1-x)^2(1+x+x^2) = (1-x^3)^2 = \text{RHS}$$

प्रश्न 13:

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$$

उत्तर 13:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a}\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2ab \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a^2 \\ 2b & -2a & a-a^3-ab^2 \end{vmatrix} \quad [C_3 \to aC_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= \frac{1}{a}\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 0 \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 1+a^2+b^2 \\ 2b & -2a & -a-a^3-ab^2 \end{vmatrix} \quad [C_3 \to C_3 + C_2 \text{ द्वारा}]$$

$$= \frac{1+a^2+b^2}{a}\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 0 \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 1 \\ 2b & -2a & -a \end{vmatrix} \left[C_3 \text{ से } 1+a^2+b^2 \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= \frac{1+a^2+b^2}{a^2}\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 0 \\ 2a^2b & a-a^3+ab^2 & a \\ 2b & -2a & -a \end{vmatrix} [R_2 \to aR_2 \text{ द्वारा}]$$

$$= \frac{1+a^2+b^2}{a^2}\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 0 \\ 2a^2b+2b & -a-a^3+ab^2 & 0 \\ 2b & -2a & -a \end{vmatrix} [R_2 \to R_2+R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= (1+a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2b & 0 \\ 2a^2b+2b & -1-a^2+b^2 & 0 \\ 2b & -2 & -1 \end{vmatrix} \left[C_2 \text{ से } a,\ C_3 \text{ से } a \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (1+a^2+b^2)(-1)\{(1+a^2-b^2)(-1-a^2+b^2)-2b(2a^2b+2b)\}$$

$$\left[C_3 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$$

$$= -(1+a^2+b^2)\{-1-a^2+b^2-a^2-a^4+a^2b^2+b^2+a^2b^2-b^4-4a^2b^2-4b^2\}$$

$$= (1+a^2+b^2)\{1+a^4+4+2a^2+2a^2b^2+2b^2\}$$

$$= (1+a^2+b^2)(1+a^2+b^2)^2 = (1-x^3)^2 = \text{RHS}$$

प्रश्न 14:

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

उत्तर 14:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^3+a & a^2b & a^2c \\ ab^2 & b^3+b & b^2c \\ c^2a & c^2b & c^3+c \end{vmatrix} \quad [R_1 \to aR_1, R_3 \to bR_3, R_3 \to cR_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2+1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2+1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+1 \end{vmatrix} \quad \left[C_1 \text{ से } a, C_2 \text{ से } b, C_3 \text{ से } c \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & 1+a^2+b^2+c^2 & 1+a^2+b^2+c^2 \\ b^2 & b^2+1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+1 \end{vmatrix} [R_1 \to R_1+R_2+\ R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b^2+1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+1 \end{vmatrix} \quad \left[R_1 \text{ से } 1+a^2+b^2+c^2 \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & b^2 \\ 0 & -1 & c^2+1 \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1-C_2, C_2 \to C_2-C_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\{1-0\} \ \left[R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$$

$$= 1+a^2+b^2+c^2 = \text{RHS}$$

प्रश्न संख्या 15 तथा 16 में सही उत्तर चुनिए।

प्रश्न 15:

यदि A एक 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|kA|$ का मान होगा:

(A) $k|A|$ (B) $k^2|A|$ (C) $k^3|A|$ (D) $3k|A|$

उत्तर 15:

यदि B एक $n \times n$ कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|kB| = k^{n-1}|B|$

इसलिए, $|kA| = k^{3-1}|A| = k^2|A|$

अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 16:

निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही है।

(A) सारणिक एक वर्ग आव्यूह है।

(B) सारणिक एक आव्यूह से संबद्ध एक संख्या है।

(C) सारणिक एक वर्ग आव्यूह से संबद्ध एक संख्या है।

(D) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर 16:

सारणिक एक वर्ग आव्यूह से संबद्ध एक संख्या है।

अतः, विकल्प (C) सही है।

गणित

(पाठ – 4) (सारणिक)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 4.3

प्रश्न 1:

निम्नलिखित प्रत्येक में दिए गए शीर्ष बिंदुओं वाले त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(1, 0), (6, 0), (4, 3)$

(ii) $(2, 7), (1, 1), (10, 8)$

(iii) $(-2, -3), (3, 2), (-1, -8)$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(i) $A(1, 0), B(6, 0), C(4, 3)$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}[1(0-3) - 0(6-4) + 1(18-0)] = \frac{1}{2}(15) = 7.5$ वर्ग इकाई

(ii) $A(2, 7),\ B(1, 1),\ C(10, 8)$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}[2(1-8) - 7(1-10) + 1(8-10)] = \frac{1}{2}(47) = 25.5$ वर्ग इकाई

(iii) $A(-2, -3), B(3, 2), C(-1, -8)$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}[-2(2+8) + 3(3+1) + 1(-24+2)] = \frac{1}{2}(-30) = -15$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= 15$ वर्ग इकाई

प्रश्न 2:

दर्शाइए कि बिंदु $A(a, b+c), B(b, c+a)$ और $C(c, a+b)$ संरेख हैं।

उत्तर 2:

यदि बिंदु $A(a, b+c), B(b, c+a)$ और $C(c, a+b)$ संरेख हैं। तो ABC से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a+b+c & 1 \\ b & a+b+c & 1 \\ c & a+b+c & 1 \end{vmatrix}$ $[C_2 \to C_1 + C_2$ द्वारा$]$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $[C_2$ से $a+b+c$ उभयनिष्ठ लेने पर$]$

$= 0$ $[\because\ C_1 = C_3]$

अतः, बिंदु $A(a, b+c), B(b, c+a)$ और $C(c, a+b)$ संरेख हैं।

प्रश्न 3:
प्रत्येक में k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है जहाँ शीर्षबिंदु निम्नलिखित है:

(i) $(k, 0), (4, 0), (0, 2)$ **(ii)** $(-2, 0), (0, 4), (0, k)$

उत्तर 3:

(i) $A(k, 0), B(4, 0), C(0, 2)$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}[k(0-2) - 0(4-0) + 1(8-0)] = \frac{1}{2}(-2k+8) = -k+4$

प्रश्नानुसार, त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= 4$ वर्ग इकाई

इसलिए, $|-k+4| = 4 \quad \Rightarrow -k+4 = \pm 4$

$\Rightarrow -k+4 = 4$ या $-k+4 = -4$

$\Rightarrow k = 0$ या $k = 8$

अतः, k का मान 0 या 8 हैं।

(ii) $A(-2, 0), B(0, 4), C(0, k)$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}[-2(4-k) - 0(0-0) + 1(0-0)] = \frac{1}{2}(-8+2k) = -4+k$

प्रश्नानुसार, त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= 4$ वर्ग इकाई

इसलिए, $|-4+k| = 4 \quad \Rightarrow -4+k = \pm 4$

$\Rightarrow -4+k = 4$ या $-4+k = -4$

$\Rightarrow k = 8$ या $k = 0$

अतः, k का मान 0 या 8 हैं।

प्रश्न 4:

(i) सारणिकों का प्रयोग करके $(1, 2)$ और $(3, 6)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) सारणिकों का प्रयोग करके $(3, 1)$ और $(9, 3)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

(i) माना, $A(1, 2)$ और $B(3, 6)$ को मिलाने वाली रेखा पर कोई बिंदु $P(x, y)$ है। अतः, बिंदु A, B और P संरेख होंगे और इनसे बनने वाले त्रिभुज ABP का क्षेत्रफल शून्य होगा।

इसलिए, त्रिभुज ABP का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[1(6-y) - 2(3-x) + 1(3y-6x)] = 0$

$\Rightarrow 6 - y - 6 + 2x + 3y - 6x = 0$

$\Rightarrow -4x + 2y = 0$

$\Rightarrow 2x = y$

(ii) माना, $A(3,1)$ और $B(9,3)$ को मिलाने वाली रेखा पर कोई बिंदु $P(x,y)$ है। अतः, बिंदु A, B और P संरेख होंगे और इनसे बनने वाले त्रिभुज ABP का क्षेत्रफल शून्य होगा।

इसलिए, त्रिभुज ABP का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}[3(3-y) - 1(9-x) + 1(9y-3x)] = 0$

$\Rightarrow 9 - 3y - 9 + x + 9y - 3x = 0$

$\Rightarrow -2x + 6y = 0$

$\Rightarrow x = 3y$

प्रश्न 5:

यदि शीर्ष $(2,-6)$, $(5,4)$ और $(k,4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो का मान है:

(A) 12 (B) -2 (C) $-12, -2$ (D) $12, -2$

उत्तर 5:

$A(2,-6), B(5,4), C(k,4)$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ k & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{2}[2(4-4) + 6(5-k) + 1(20-4k)] = \dfrac{1}{2}(30 - 6k + 20 - 4k) = 25 - 5k$

प्रश्नानुसार, त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 35 वर्ग इकाई

इसलिए, $|25 - 5k| = 35$ $\Rightarrow 25 - 5k = \pm 35$

$\Rightarrow 25 - 5k = 35$ या $25 - 5k = -35$

$\Rightarrow k = \dfrac{-10}{5} = -2$ या $k = \dfrac{60}{5} = 12$

अतः, विकल्प (D) सही है।

गणित

(पाठ – 4) (सारणिक)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 4.4

निम्नलिखित सारणिकों के अवयवों के उपसरणिक एवं सहखंड लिखिए।

प्रश्न 1:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

उत्तर 1:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

अवयव a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है एवं a_{ij} का सहखंड $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ है। इसलिए,

अवयव a_{11} का उपसारणिक $M_{11} = 3$ तथा a_{11} का सहखंड $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 3$ है।

अवयव a_{12} का उपसारणिक $M_{12} = 0$ तथा a_{12} का सहखंड $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = 0$ है।

अवयव a_{21} का उपसारणिक $M_{21} = -4$ तथा a_{21} का सहखंड $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = 4$ है।

अवयव a_{22} का उपसारणिक $M_{22} = 2$ तथा a_{22} का सहखंड $A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = 2$ है।

(ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

अवयव a_{11} का उपसारणिक $M_{11} = d$ तथा a_{11} का सहखंड $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = d$ है।

अवयव a_{12} का उपसारणिक $M_{12} = b$ तथा a_{12} का सहखंड $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -b$ है।

अवयव a_{21} का उपसारणिक $M_{21} = c$ तथा a_{21} का सहखंड $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -c$ है।

अवयव a_{22} का उपसारणिक $M_{22} = a$ तथा a_{22} का सहखंड $A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = a$ है।

प्रश्न 2:

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

उत्तर 2:

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

यहाँ,

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1,\quad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0,\quad M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0,\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1,\quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0,\quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0,\quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

एवं $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, इसलिए

$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 1 \quad A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = 0 \quad A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = 0$

$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = 0 \quad A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = 1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3}M_{233} = 0$

$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = 0 \quad A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = 0 \quad A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = 1$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,

यहाँ,

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 1 = 11,\ \ M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6,\ M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4,\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,\quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20, M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 12 = -13\ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5$

एवं $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, इसलिए

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 11 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -6 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 3$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 4 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{233} = -1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -20 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 13 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 5$

प्रश्न 3:

दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखंडो का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

यहाँ, $a_{21} = 2,\ a_{22} = 0,\ a_{23} = 1$ तथा

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 16) = 7$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 3) = -7$

इसलिए, $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(7) + 0(7) + 1(-7) = 7$

प्रश्न 4:

तीसरे स्तंभ के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

यहाँ, $a_{13} = yz,\ a_{23} = zx,\ a_{33} = xy$ तथा

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix} = z - y$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = -(z - x) = x - z$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = y - x$

इसलिए, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x)$

$= yz^2 - y^2z + zx^2 - xz^2 + xy^2 - x^2y$

$= zx^2 - x^2y - xz^2 + xy^2 + yz^2 - y^2z$

$= x^2(z-y) - x(z^2-y^2) + yz(z-y)$

$= (z-y)[x^2 - x(z+y) + yz]$

$= (z-y)[x^2 - xz - xy + yz]$

$= (z-y)[x(x-z) - y(x-z)]$

$= (x-z)(z-y)(x-y)$

$= (x-y)(y-z)(z-x)$

प्रश्न 5:

यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ और a_{ij} का सहखंड A_{ij} हो तो Δ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है:

(A) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$

(B) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(C) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$

(D) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

उत्तर 5:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है: $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

अतः, विकल्प (D) सही है।

गणित

(पाठ – 4) (सारणिक)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 4.5

प्रश्न 1 और 2 में प्रत्येक आव्यूह का सहखंडज (adjoint) ज्ञात कीजिए

प्रश्न 1:

$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$

उत्तर 1:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$, इसलिए, $A_{11} = 4 \quad A_{12} = -3 \quad A_{21} = -2 \quad A_{22} = 1$

आव्यूह A का सहखंडज = $\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\A_{12} & A_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}$

प्रश्न 2:

$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\2 & 3 & 5\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}$

उत्तर 2:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\2 & 3 & 5\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, इसलिए

$A_{11} = 3 \qquad A_{12} = -12 \qquad A_{13} = 6$

$A_{21} = 1 \qquad A_{22} = 5 \qquad A_{23} = 2$

$A_{31} = -11 \qquad A_{32} = -1 \qquad A_{33} = 5$

आव्यूह A का सहखंडज = $\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\A_{12} & A_{22} & A_{32}\\A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1 & -11\\-12 & 5 & -1\\6 & 2 & 5\end{bmatrix}$

प्रश्न 3 और 4 में सत्यापित कीजिए कि $A(adj\ A) = (adj\ A).A = |A|.I$ है।

प्रश्न 3:

$\begin{bmatrix}2 & 3\\-4 & -6\end{bmatrix}$

उत्तर 3:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix}2 & 3\\-4 & -6\end{bmatrix}$,

इसलिए, $A_{11} = -6 \quad A_{12} = 4 \quad A_{21} = -3 \quad A_{22} = 2$

$|A| = -12 + 12 = 0$

$$adj\ A = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\A_{12} & A_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & -3\\4 & 2\end{bmatrix}$$

$A(adj\ A) = \begin{bmatrix}2 & 3\\-4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & -3\\4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-12+12 & -6+6\\24-24 & 12-12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

$(adj\ A).A = \begin{bmatrix}-6 & -3\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\-4 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-12+12 & -18+18\\8-8 & 12-12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

$|A|.I = 0.\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

अतः, $A(adj\ A) = (adj\ A).A = |A|.I = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

प्रश्न 4:

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

उत्तर 4:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, इसलिए $|A| = 1(0-0) + 1(9+2) + 2(0-0) = 11$

$A_{11} = 0$ $\quad A_{12} = -11$ $\quad A_{13} = 0$
$A_{21} = 3$ $\quad A_{22} = 1$ $\quad A_{23} = -1$
$A_{31} = 2$ $\quad A_{32} = 8$ $\quad A_{33} = 3$

आव्यूह A का सहखंडज $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A(adj\ A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+11+0 & 3-1-2 & 2-8+6 \\ 0+0+0 & 9+0+2 & 6+0-6 \\ 0+0+0 & 3+0-3 & 2+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

$(adj\ A).A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+9+2 & 0+0+0 & 0-6+6 \\ -11+3+8 & 11+0+0 & -22-2+24 \\ 0-3+3 & 0+0+0 & 0+2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

$|A|.I = 11.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

अतः, $A(adj\ A) = (adj\ A).A = |A|.I = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

प्रश्न 5 से 11 में दिए गए प्रत्येक आव्यूहों के व्युत्क्रम (जिनका अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5:

$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

उत्तर 5:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,

इसलिए, $A_{11} = 3 \quad A_{12} = -4 \quad A_{21} = 2 \quad A_{22} = 2$

$|A| = 6 + 8 = 14 \neq 0 \quad \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 6:

$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर 6:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$,

इसलिए, $A_{11} = 2 \quad A_{12} = 3 \quad A_{21} = -5 \quad A_{22} = -1$

$|A| = -2 + 15 = 13 \neq 0 \quad \Rightarrow \; A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 7:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

उत्तर 7:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

इसलिए $|A| = 1(10 - 0) - 2(0 - 0) + 3(0 - 0) = 10 \neq 0 \; \Rightarrow \; A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = 10 \qquad A_{12} = 0 \qquad A_{13} = 0$

$A_{21} = -10 \qquad A_{22} = 5 \qquad A_{23} = 0$

$A_{31} = 2 \qquad A_{32} = -4 \qquad A_{33} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 8:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

उत्तर 8:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,

इसलिए $|A| = 1(-3 - 0) - 0(-3 - 0) + 0(6 - 15) = -3 \neq 0 \; \Rightarrow \; A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = -3 \qquad A_{12} = 3 \qquad A_{13} = -9$

$A_{21} = 0 \qquad A_{22} = -1 \qquad A_{23} = -2$

$A_{31} = 0 \qquad A_{32} = 0 \qquad A_{33} = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 9:

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर 9:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

इसलिए $|A| = 2(-1-0) - 1(4-0) + 3(8-7) = -3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = -1$ $\quad A_{12} = -4$ $\quad A_{13} = 1$

$A_{21} = 5$ $\quad A_{22} = 23$ $\quad A_{23} = -11$

$A_{31} = 3$ $\quad A_{32} = 12$ $\quad A_{33} = -6$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 10:

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

उत्तर 10:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$,

इसलिए $|A| = 1(8-6) + 1(0+9) + 2(0-6) = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = 2$ $\quad A_{12} = -9$ $\quad A_{13} = -6$

$A_{21} = 0$ $\quad A_{22} = -2$ $\quad A_{23} = -1$

$A_{31} = -1$ $\quad A_{32} = 3$ $\quad A_{33} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -9 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 11:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

उत्तर 11:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$, इसलिए

$|A| = 1(-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 0(0-0) + 0(0-0) = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = 1$ $\quad A_{12} = 0$ $\quad A_{13} = 0$

$A_{21} = 0$ $\quad A_{22} = -\cos\alpha$ $\quad A_{23} = -\sin\alpha$

$A_{31} = 0$ $\quad A_{32} = -\sin\alpha$ $\quad A_{33} = \cos\alpha$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

प्रश्न 12:

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

उत्तर 12:

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, इसलिए, $A_{11} = 5 \quad A_{12} = -2 \quad A_{21} = -7 \quad A_{22} = 3$

$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, इसलिए, $B_{11} = 9 \quad B_{12} = -7 \quad B_{21} = -8 \quad B_{22} = 6$

$|A| = 54 - 56 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow B^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} adj\, B = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/2 & 4 \\ 7/2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 4 \\ 7/2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{45}{2} - 8 & \frac{63}{2} + 12 \\ \frac{35}{2} + 6 & -\frac{49}{2} - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 49 & 24 + 63 \\ 12 + 35 & 16 + 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}$$

$|AB| = 67 \times 61 - 87 \times 47 = 4087 - 4089 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow (AB)^{-1}$ का अस्तित्व है।

$C_{11} = 61 \quad C_{12} = -47 \quad C_{21} = -87 \quad C_{22} = 67$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} adj\, \mathrm{AB} = \frac{1}{|AB|}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$$

अतः, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

प्रश्न 13:

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = O$ है इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

उत्तर 13:

$\mathrm{LHS} = A^2 - 5A + 7I = AA - 5A + 7I$

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 - 1 & 3 + 2 \\ -3 - 2 & -1 + 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 - 15 + 7 & 5 - 5 + 0 \\ -5 + 5 + 0 & 3 - 10 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{O} = \mathrm{RHS}$

$\Rightarrow A^2 - 5A + 7I = O \qquad \Rightarrow A^2 - 5A = -7I$

दोनों ओर A^{-1} से उत्तर गुणन करने पर (क्योंकि $|A| \neq 0$)

$AAA^{-1} - 5AA^{-1} = -7IA^{-1}$

$\Rightarrow AI - 5I = -7A^{-1} \qquad$ [क्योंकि $AA^{-1} = I$]

$\Rightarrow 7A^{-1} = 5I - A = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

प्रश्न 14:

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए a और b ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए ताकि $A^2 + aA + bI = O$ हो।

उत्तर 14:

दिया है: $A^2 + aA + bI = O$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9+2 & 6+2 \\ 3+1 & 2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a & 2a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a+0 \\ 4+a+0 & 3+a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 4 + a = 0 \quad \Rightarrow a = -4$ और $3 + a + b = 0 \ \Rightarrow b = -3 - a = -3 + 4 = 1$

अतः, $a = -4,\ b = 1$

प्रश्न 15:

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I = O$ है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

उत्तर 15:

$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+1+2 & 1+2-1 & 1-3+3 \\ 1+2-6 & 1+4+3 & 1-6-9 \\ 2-1+6 & 2-2-3 & 2+3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+2+2 & 4+4-1 & 4-6+3 \\ -3+8-28 & -3+16+14 & -3-24-42 \\ 7-3+28 & 7-6-14 & 7+9+42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix}$

$\text{LHS} = A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I$

$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 12 & 6 \\ -18 & 48 & -84 \\ 42 & -18 & 84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & -15 \\ 10 & -5 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8-24+5+11 & 7-12+5+0 & 1-6+5+0 \\ -23+18+5+0 & 27-48+10+11 & -69+84-15+0 \\ 32-42+10+0 & -13+18-5+0 & 58-84+15+11 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{O} = \text{RHS}$

$\Rightarrow A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I = O \qquad \Rightarrow A^3 - 6A^2 + 5A = -11I$

दोनों ओर A^{-1} से उत्तर गुणन करने पर (क्योंकि $|A| \neq 0$)

$A^2AA^{-1} - 6AAA^{-1} + 5AA^{-1} = -11IA^{-1}$

$\Rightarrow A^2I - 6AI + 5I = -11A^{-1}$ $\qquad\qquad$ $\left[\text{क्योंकि } AA^{-1} = I\right]$

$\Rightarrow 11A^{-1} = -A^2 + 6A - 5I$

$$\Rightarrow 11A^{-1} = -\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 11A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & 14 \\ -7 & 3 & -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & -18 \\ 12 & -6 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 11A^{-1} = \begin{bmatrix} -4+6-5 & -2+6+0 & -1+6+0 \\ 3+6-0 & -8+12-5 & 14-18+0 \\ -7+12+0 & 3-6+0 & -14+18-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 16:

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ है तथा इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

उत्तर 16:

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+1+1 & -2-2-1 & 2+1+2 \\ -2-2-1 & 1+4+1 & -1-2-2 \\ 2+1+2 & -1-2-2 & 1+1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+5+5 & -6-10-5 & 6+5+10 \\ -10-6-5 & 5+12+5 & -5-6-10 \\ 10+5+6 & -5-10-6 & 5+5+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

$\text{LHS} = A^3 - 6A^2 + 9A - 4I$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 36 & -30 & 30 \\ -30 & 36 & -30 \\ 30 & -30 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & -9 & 9 \\ -9 & 18 & -9 \\ 9 & -9 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-36+18-4 & -21+30-9+0 & 21-30+9+0 \\ -21+30-9-0 & 22-36+18-4 & -21+30-9+0 \\ 21-30+9-0 & -21+30-9-0 & 22-36+18-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{O} = \text{RHS}$$

$\Rightarrow A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ $\qquad$ $\Rightarrow A^3 - 6A^2 + 9A = 4I$

दोनों ओर A^{-1} से उत्तर गुणन करने पर (क्योंकि $|A| \neq 0$)

$A^2AA^{-1} - 6AAA^{-1} + 9AA^{-1} = 4IA^{-1}$

$\Rightarrow A^2I - 6AI + 9I = 4A^{-1}$ [क्योंकि $AA^{-1} = I$]

$\Rightarrow 4A^{-1} = A^2 - 6A + 9I$

$$\Rightarrow 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -6 & 6 \\ -6 & 12 & -6 \\ 6 & -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6-12+9 & -5+6+0 & 5-6+0 \\ -5+6+0 & 6-12+9 & -5+6+0 \\ 5-6+0 & -5+6+0 & 6-12+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 17:

यदि A, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|adj\ A|$ का मान है:

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

उत्तर 17:

हम जानते हैं कि $adj\ A = |A|I$

$$\Rightarrow (adj\ A)A = |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |(adj\ A)A| = |A|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3$$

$\Rightarrow |adj\ A| = |A|^2$, अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 18:

यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमीय आव्यूह है तो $det(A^{-1})$ बराबर:

(A) $\det(A)$ (B) $\frac{1}{\det(A)}$ (C) 1 (D) 0

उत्तर 18:

दिया है: A व्युत्क्रमीय आव्यूह है, अतः, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A$

A कोटि दो का आव्यूह है, माना $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

इसलिए, $|A| = ad - bc$ तथा $adj\ A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$det(A^{-1}) = |A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|^2}\begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|^2}(ad - bc) = \frac{1}{|A|^2}|A| = \frac{1}{|A|}$$

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(पाठ – 4) (सारणिक)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 4.6

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 6 तक दी गई समीकरण निकायों का संगत अथवा असंगत के रूप में वर्गीकरण कीजिए।

प्रश्न 1:

$x + 2y = 2$
$2x + 3y = 3$

उत्तर 1:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} x + 2y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{matrix}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = 3 - 4 = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है।इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

प्रश्न 2:

$2x - y = 5$
$x + y = 4$

उत्तर 2:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{matrix}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$|A| = 2 + 1 = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है।इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

प्रश्न 3:

$x + 3y = 5$
$2x + 6y = 8$

उत्तर 3:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 8 \end{matrix}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$|A| = 6 - 6 = 0 \quad \Rightarrow$ आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व नहीं है।

अब, $adj\ A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$(adj\ A)B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 - 24 \\ -10 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \neq O$

इसलिए, दी गई समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय असंगत हैं।

प्रश्न 4:

$$x + y + z = 1$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$ax + ay + 2az = 4$$

उत्तर 4:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 3y + 2z &= 2 \\ ax + ay + 2az &= 4 \end{aligned}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ a & a & 2a \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1(6a - 2a) - 1(4a - 2a) + 1(2a - 3a) = a \neq 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

प्रश्न 5:

$$3x - y - 2z = 2$$
$$2y - z = -1$$
$$3x - 5y = 3$$

उत्तर 5:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{aligned} 3x - y - 2z &= 2 \\ 2y - z &= -1 \\ 3x - 5y &= 3 \end{aligned}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = 3(0 - 5) + 1(0 + 3) - 2(0 - 6) = -15 + 3 + 12 = 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व नहीं है। अब,

$A_{11} = -5$ $\quad A_{12} = -3$ $\quad A_{13} = -6$

$A_{21} = 10$ $\quad A_{22} = 6$ $\quad A_{23} = 12$

$A_{31} = 5$ $\quad A_{32} = 3$ $\quad A_{33} = 6$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(adj\ A)B = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 - 10 + 15 \\ -6 - 6 + 9 \\ -12 - 12 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \neq O$$

इसलिए, दी गई समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय असंगत हैं।

प्रश्न 6:

$5x - y + 4z = 5$
$2x + 3y + 5z = 2$
$5x - 2y + 6z = -1$

उत्तर 6:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} 5x - y + 4z = 5 \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ 5x - 2y + 6z = -1 \end{matrix}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$|A| = 5(18 + 10) + 1(12 - 25) + 4(-4 - 15) = 140 - 13 - 76 = 51 \neq 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 14 तक प्रत्येक समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

प्रश्न 7:

$5x + 2y = 4$
$7x + 3y = 5$

उत्तर 7:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} 5x + 2y = 4 \\ 7x + 3y = 5 \end{matrix}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है।इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।

इसलिए, $A_{11} = 3 \quad A_{12} = -7 \quad A_{21} = -2 \quad A_{22} = 5$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 10 \\ -28 + 25 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x = 2, \quad y = -3$

प्रश्न 8:

$2x - y = -2$
$3x + 4y = 3$

उत्तर 8:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} 2x - y = -2 \\ 3x + 4y = 3 \end{matrix}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = 8 + 3 = 11 \neq 0 \quad \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है।इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।
अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।
इसलिए, $A_{11} = 4 \quad A_{12} = -3 \quad A_{21} = 1 \quad A_{22} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -8+3 \\ 6+6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{11} \\ \frac{12}{11} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x = -\frac{5}{11}, \quad y = \frac{12}{11}$

प्रश्न 9:
$4x - 3y = 3$
$3x - 5y = 7$

उत्तर 9:
दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} 4x - 3y = 3 \\ 3x - 5y = 7 \end{matrix}$
समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$|A| = -20 + 9 = -11 \neq 0 \quad \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है।इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।
अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।
इसलिए, $A_{11} = -5 \quad A_{12} = -3 \quad A_{21} = 3 \quad A_{22} = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -15+21 \\ -9+28 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{11} \\ -\frac{19}{11} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x = -\frac{6}{11}, \quad y = -\frac{19}{11}$

प्रश्न 10:
$5x + 2y = 3$
$3x + 2y = 5$

उत्तर 10:
दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} 5x + 2y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{matrix}$
समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$|A| = 10 - 6 = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है।इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।
अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं।
इसलिए, $A_{11} = 2 \quad A_{12} = -3 \quad A_{21} = -2 \quad A_{22} = 5$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{4} \\ \frac{16}{4} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x = -1, \quad y = 4$

प्रश्न 11:

$2x + y + z = 1$

$x - 2y - z = \frac{3}{2}$

$3y - 5z = 9$

उत्तर 11:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x - 2y - z &= \frac{3}{2} \\ 3y - 5z &= 9 \end{aligned}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$|A| = 2(10+3) - 1(-5-0) + 1(3-0) = 26 + 5 + 3 = 34 \neq 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं। इसलिए,

$A_{11} = 13$	$A_{12} = 5$	$A_{13} = 3$
$A_{21} = 8$	$A_{22} = -10$	$A_{23} = -6$
$A_{31} = 1$	$A_{32} = 3$	$A_{33} = -5$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 13+12+9 \\ 5-15+27 \\ 3-9-45 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 34 \\ 17 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{3}{2}$

प्रश्न 12:

$x - y + z = 4$

$2x + y - 3z = 0$

$x + y + z = 2$

उत्तर 12:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ 2x + y - 3z &= 0 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1(1+3) + 1(2+3) + 1(2-1) = 4 + 5 + 1 = 10 \neq 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं। इसलिए,

$A_{11} = 4$ $\quad A_{12} = -5$ $\quad A_{13} = 1$

$A_{21} = 2$ $\quad A_{22} = 0$ $\quad A_{23} = -2$

$A_{31} = 2$ $\quad A_{32} = 5$ $\quad A_{33} = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 16+0+4 \\ -20+0+10 \\ 4+0+6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2, y = -1, z = 1$$

प्रश्न 13:

$2x + 3y + 3z = 5$

$x - 2y + z = -4$

$3x - y - 2z = 3$

उत्तर 13:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} 2x + 3y + 3z = 5 \\ x - 2y + z = -4 \\ 3x - y - 2z = 3 \end{matrix}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = 2(4+1) - 3(-2-3) + 3(-1+6) = 10 + 15 + 15 = 40 \neq 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं। इसलिए,

$A_{11} = 5$ $\quad A_{12} = 5$ $\quad A_{13} = 5$

$A_{21} = 3$ $\quad A_{22} = -13$ $\quad A_{23} = 11$

$A_{31} = 9$ $\quad A_{32} = 1$ $\quad A_{33} = -7$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 25-12+27 \\ 25+52+3 \\ 25-44-21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = 2, z = -1$$

प्रश्न 14:

$$x - y + 2z = 7$$
$$3x + 4y - 5z = -5$$
$$2x - y + 3z = 12$$

उत्तर 14:

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} x - y + 2z = 7 \\ 3x + 4y - 5z = -5 \\ 2x - y + 3z = 12 \end{matrix}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1(12-5) + 1(9+10) + 2(-3-8) = 7 + 19 - 22 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं। इसलिए,

$A_{11} = 7$ $\quad$ $A_{12} = -19$ $\quad$ $A_{13} = -11$

$A_{21} = 1$ $\quad$ $A_{22} = -1$ $\quad$ $A_{23} = -1$

$A_{31} = -3$ $\quad$ $A_{32} = 11$ $\quad$ $A_{33} = 7$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 49 - 5 - 36 \\ -133 + 5 + 132 \\ -77 + 5 + 84 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = 1, z = 3$$

प्रश्न 15:

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ है तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का प्रयोग करके निम्लिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए। $\begin{matrix} 2x - 3y + 5z = 11 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \\ x + y - 2z = -3 \end{matrix}$

उत्तर 15:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$|A| = 2(-4+4) + 3(-6+4) + 5(3-2) = 0 - 6 + 5 = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है। इसलिए,

$A_{11} = 0$ $\quad$ $A_{12} = 2$ $\quad$ $A_{13} = 1$

$A_{21} = -1$ $\quad$ $A_{22} = -9$ $\quad$ $A_{23} = -5$

$A_{31} = 2$ $\quad$ $A_{32} = 23$ $\quad$ $A_{33} = 13$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}$$

दी गई समीकरण निकाय: $\begin{matrix} 2x - 3y + 5z = 11 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \\ x + y - 2z = -3 \end{matrix}$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 5 + 6 \\ -22 - 45 + 69 \\ -11 - 25 + 39 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3$$

प्रश्न 16:

4 kg प्याज, 3 kg गेहूँ और 2 kg चावल का मूल्य ₹60 है। 2 kg प्याज, 4 kg गेहूँ और 6 kg चावल का मूल्य ₹90 है। 6 kg प्याज, 2 kg और 3 kg चावल का मूल्य ₹70 है। आव्यूह विधि द्वारा प्रत्येक का मूल्य प्रति kg ज्ञात कीजिए।

उत्तर 16:

माना, 1 kg प्याज का मूल्य = ₹ x,
माना, 1 kg गेहूँ का मूल्य = ₹ y और
माना, 1 kg चावल का मूल्य = ₹ z है।
यहाँ, 4 kg प्याज, 3 kg गेहूँ और 2 kg चावल का मूल्य ₹60 है। इसलिए, $4x + 3y + 2z = 60$
2 kg प्याज, 4 kg गेहूँ और 6 kg चावल का मूल्य ₹90 है। इसलिए, $2x + 4y + 6z = 90$ और
6 kg प्याज, 2 kg और 3 kg चावल का मूल्य ₹70 है। इसलिए, $6x + 2y + 3z = 70$

दी गई समीकरण निकाय:
$$4x + 3y + 2z = 60$$
$$2x + 4y + 6z = 90$$
$$6x + 2y + 3z = 70$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$|A| = 4(12 - 12) - 3(6 - 36) + 2(4 - 24) = 0 + 90 - 40 = 50 \neq 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।
अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत हैं। इसलिए,

$A_{11} = 0$	$A_{12} = 30$	$A_{13} = -20$
$A_{21} = -5$	$A_{22} = 0$	$A_{23} = 10$
$A_{31} = 10$	$A_{32} = -20$	$A_{33} = 10$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 - 450 + 700 \\ 1800 + 0 - 1400 \\ -1200 + 900 + 700 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 250 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 5, y = 8, z = 8$$

अतः, 1 kg प्याज का मूल्य ₹ 5, 1 kg गेहूँ का मूल्य ₹ 8 और 1 kg चावल का मूल्य ₹ 8 है।

गणित

(पाठ – 4) (सारणिक)

(कक्षा 12)

अध्याय 4 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1:

सिद्ध कीजिए कि सारणिक $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$, θ से स्वतंत्र है।

उत्तर 1:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$$

$= x(-x^2 - 1) - \sin\theta\,(-x\sin\theta - \cos\theta) + \cos\theta\,(-\sin\theta + x\cos\theta)$

$= -x^3 - x + x\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta + x\cos^2\theta$

$= -x^3 - x + x(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -x^3 - x + x = -x^3$, जो θ से स्वतंत्र है।

प्रश्न 2:

सारणिक का प्रसरण किए बिना सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

उत्तर 2:

$\text{LHS} = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \dfrac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & abc \\ b^2 & b^3 & abc \\ c^2 & c^3 & abc \end{vmatrix}$ $[R_1 \to aR_1, R_2 \to bR_2, R_3 \to cR_3$ द्वारा$]$

$= \dfrac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$ $\left[C_3\text{से } abc \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$

$= (-1)^1\begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix}$ $[C_1 \leftrightarrow C_3$ द्वारा$]$

$= (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ $[C_2 \leftrightarrow C_3$ द्वारा$]$

$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \text{RHS}$

प्रश्न 3:

$\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$= -\sin\alpha\,(-\sin\alpha\sin^2\beta - \sin\alpha\cos^2\beta) - 0(\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta -$
$\cos\alpha\sin\beta\sin\alpha\cos\beta) + \cos\alpha\,(\cos\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\sin^2\beta)$

$\left[C_3 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$

$= \sin^2\alpha\,(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + \cos^2\alpha\,(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$

$= \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

प्रश्न 4:

यदि a, b और c वास्तविक संख्याएँ हो और सरणिक $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$ हो तो दर्शाइए कि या तो $a+b+c=0$ या $a=b=c$ है।

उत्तर 4:

दिया है: $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0 \quad [R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ द्वारा]

$\Rightarrow 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0 \quad [R_1$ से $2(a+b+c)$ उभयनिष्ट लेने पर]

$\Rightarrow 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c+a & b-c & b-a \\ a+b & c-a & c-\mathrm{b} \end{vmatrix} = 0 \quad [C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1$ द्वारा]

$\Rightarrow 2(a+b+c)1[(\mathrm{b}-c)(c-b) - (b-a)(c-a)] = 0 \quad [R_1$ के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$\Rightarrow 2(a+b+c)[bc - b^2 - c^2 + bc - (bc - ba - ac + a^2)] = 0$

$\Rightarrow 2(a+b+c)[bc - b^2 - c^2 + ab + ca - a^2] = 0$

$\Rightarrow -(a+b+c)[2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca] = 0$

$\Rightarrow -(a+b+c)[(a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca)] = 0$

$\Rightarrow -(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$

$\Rightarrow a+b+c=0$ या $(a-b)^2 = 0, (b-c)^2 = 0, (c-a)^2 = 0$

$\Rightarrow a+b+c=0$ या $a-b=0, \quad b-c=0, \quad c-a=0$

$\Rightarrow a+b+c=0$ या $a=b, \quad b=c, \quad c=a$

इसलिए $a+b+c=0$ या $a=b=c$

प्रश्न 5:

यदि $a \neq 0$ हो तो समीकरण $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$ को हल कीजिए।

उत्तर 5:

दिया है: $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3x+a & 3x+a & 3x+a \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0 \quad [R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ द्वारा]

$\Rightarrow (3x+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0 \quad [R_1$ से $(3x+a)$ उभयनिष्ट लेने पर]

$\Rightarrow (3x+a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & a & 0 \\ x & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \quad [C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1$ द्वारा]

$\Rightarrow (3x+a)1[a^2-0]=0$ $\quad$ $\left[R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$

$\Rightarrow a^2(3x+a)=0$

$\Rightarrow (3x+a)=0$ $\quad$ $[\because\ a \neq 0]$

$\Rightarrow x=-\dfrac{a}{3}$

प्रश्न 6:

सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

उत्तर 6:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a^2 & 0 & 2ac \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1+R_2-R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$= abc\begin{vmatrix} 2a & 0 & 2a \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix} \quad \left[C_1, C_2, C_3 \text{ से } a, b, c \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= abc\begin{vmatrix} 2a & 0 & 0 \\ a+b & b & -b \\ b & b+c & c-b \end{vmatrix} \quad [C_3 \to C_3 - C_1 \text{ द्वारा}]$$

$$= (abc)2a[b(c-b)-(-b)(b+c)] \quad \left[R_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$$

$$= 2a^2bc[bc-b^2+b^2+bc] = 2a^2bc[2bc] = 4a^2b^2c^2 = \text{RHS}$$

प्रश्न 7:

यदि $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, हो तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 7:

यहाँ, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$,

इसलिए $|B| = 1(3-0)-2(-1-0)-2(2-0) = 1 \neq 0 \ \Rightarrow\ B^{-1}$ का अस्तित्व है।

$B_{11}=3$ $\quad$ $B_{12}=1$ $\quad$ $B_{13}=2$

$B_{21}=2$ $\quad$ $B_{22}=1$ $\quad$ $B_{23}=2$

$B_{31}=6$ $\quad$ $B_{32}=2$ $\quad$ $B_{33}=5$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}adj\ B = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

हम जानते हैं कि $(\text{AB})^{-1} = \text{B}^{-1}\text{A}^{-1}$, इसलिए

$$(\text{AB})^{-1} = \text{B}^{-1}\text{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-30+30 & -3+12-12 & 3-10+12 \\ 3-15+10 & -1+6-4 & 1-5+4 \\ 6-30+25 & -2+12-10 & 2-10+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 8:

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यपित कि

(i) $(adj\ A)^{-1} = adj(A^{-1})$ **(ii)** $(A^{-1})^{-1} = A$

उत्तर 8:

(i) यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, इसलिए

$|A| = 1(15-1) + 2(-10-1) + 1(-2-3) = -13 \neq 0 \ \Rightarrow\ A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = 14$ $A_{12} = 11$ $A_{13} = -5$

$A_{21} = 11$ $A_{22} = 4$ $A_{23} = -3$

$A_{31} = -5$ $A_{32} = -3$ $A_{33} = -1$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \dots(1)$$

माना, $B = adj\ A$, इसलिए, $B = \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, इसलिए

$|B| = 14(-4-9) - 11(-11-15) - 5(-33+20) = -182 + 286 + 65 = 169 \neq 0$

$\Rightarrow\ B^{-1}$ का अस्तित्व है।

$B_{11} = -13$ $B_{12} = 26$ $B_{13} = -13$

$B_{21} = 26$ $B_{22} = -39$ $B_{23} = -13$

$B_{31} = -13$ $B_{32} = -13$ $B_{33} = -65$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{169}\begin{bmatrix} -13 & 26 & -13 \\ 26 & -39 & -13 \\ -13 & -13 & -65 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (adj\ A)^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad \dots(2)$$

माना, $C = A^{-1}$, इसलिए, $C = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{11}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$, इसलिए

$C_{11} = -\frac{1}{13}$ $C_{12} = \frac{2}{13}$ $C_{13} = -\frac{1}{13}$

$C_{21} = \frac{2}{13}$ $C_{22} = -\frac{3}{13}$ $C_{23} = -\frac{1}{13}$

$C_{31} = -\frac{1}{13}$ $C_{32} = -\frac{1}{13}$ $C_{33} = -\frac{5}{13}$

$$Adj\ C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Adj\ C = adj(A^{-1}) = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad \dots(3)$$

समीकरण (2) और (3) से, $(adj\ A)^{-1} = adj(A^{-1})$

(ii) समीकरण (1) से,

$$A^{-1} = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

माना, $D = A^{-1}$, इसलिए, $D = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{11}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$, इसलिए

$$|D| = -\left(\frac{1}{13}\right)^3 [14(-4-9) - 11(-11-15) - 5(-33+20)]$$

$= -\left(\frac{1}{13}\right)^3 (169) = -\frac{1}{13} \neq 0 \quad \Rightarrow D^{-1}$ का अस्तित्व है।

$D_{11} = -\frac{1}{13}$ $\quad D_{12} = \frac{2}{13}$ $\quad D_{13} = -\frac{1}{13}$

$D_{21} = \frac{2}{13}$ $\quad D_{22} = -\frac{3}{13}$ $\quad D_{23} = -\frac{1}{13}$

$D_{31} = -\frac{1}{13}$ $\quad D_{32} = -\frac{1}{13}$ $\quad D_{33} = -\frac{5}{13}$

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1/13}\begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D^{-1} = (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A$$

प्रश्न 9:

$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 9:

दिया है: $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix}$$ [$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ द्वारा]

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$ [C_1 से $2(x+y)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 0 & -x & y \\ 0 & y & x-y \\ 1 & y & y+k \end{vmatrix}$$ [$R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3$ द्वारा]

$= 2(x+y)\{(-x)(x-y) - y.y\}$ [C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$= 2(x+y)(-x^2 + xy - y^2)$

$= -2(x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$= -2(x^3 + y^3)$

प्रश्न 10:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 10:

दिया है: $$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -y & 0 \\ 0 & y & -x \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$$ [$R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3$ द्वारा]

$= \{(-y)(-x) - y.0\}$ [C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$= xy$

प्रश्न 11:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)$$

उत्तर 11:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha+\beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix}$$ [$C_3 \to C_1 + C_3$ द्वारा]

$$= (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \\ \gamma & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix}$$ [C_3 से $\alpha+\beta+\gamma$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$= (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \alpha^2-\beta^2 & 0 \\ \beta-\gamma & \beta^2-\gamma^2 & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix}$ $[R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3$ द्वारा$]$

$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix} 1 & \alpha+\beta & 0 \\ 1 & \beta+\gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix}$ $\left[R_1 \text{ से } \alpha-\beta, R_2 \text{ से } \beta-\gamma \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$

$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\{(\beta+\gamma)-(\alpha+\beta)\}$ $\left[C_3 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$

$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = \text{RHS}$

प्रश्न 12:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1+pxyz)(x-y)(y-z)(z-x)$$

उत्तर 12:

$\text{LHS} = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & px^3 \\ y & y^2 & py^3 \\ z & z^2 & pz^3 \end{vmatrix}$

$= (-1)^1\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$ $\left[C_3 \text{ से } p \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$

$= (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + pxyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ $\left[R_1 \text{ से } x, R_2 \text{ से } y, R_3 \text{ से } z \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$

$= (1+pxyz)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ $\left[\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$

$= (1+pxyz)\begin{vmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ $[R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3$ द्वारा$]$

$= (1+pxyz)(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ $\left[R_1 \text{ से } x-y, R_2 \text{ से } y-z \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$

$= (1+pxyz)(x-y)(y-z)\{(y+z)-(x+y)\}$ $\left[C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर}\right]$

$= (1+pxyz)(x-y)(y-z)(z-x) = \text{RHS}$

प्रश्न 13:

$$\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

उत्तर 13:

$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+b+c & -a+b & -a+c \\ a+b+c & 3b & -b+c \\ a+b+c & -c+b & 3c \end{vmatrix}$ $[C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ द्वारा$]$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & -a+b & -a+c\\ 1 & 3b & -b+c\\ 1 & -c+b & 3c\end{vmatrix}$$ [C_1 से $a+b+c$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix}0 & -a-2b & -a+b\\ 0 & 2b+c & -b-2c\\ 1 & -c+b & 3c\end{vmatrix}$$ [$R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3$ द्वारा]

$= (a+b+c)\{(-a-2b)(-b-2c) - (2b+c)(-a+b)\}$

[C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$= (a+b+c)\left(ab + 2ac + 2b^2 + 4bc - (-2ab + 2b^2 - ac + bc)\right)$

$= (a+b+c)(3ab + 3bc + 3ca)$

$= 3(a+b+c)(ab+bc+ca) = \text{RHS}$

प्रश्न 14:

$$\begin{vmatrix}1 & 1+p & 1+p+q\\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q\\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q\end{vmatrix} = 1$$

उत्तर 14:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix}1 & 1+p & 1+p+q\\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q\\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 1+p & 1+p+q\\ 0 & 1 & 2+p\\ 0 & 3 & 7+3p\end{vmatrix}$$ [$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1$ द्वारा]

$= 1\{1.(7+3p) - (3)(2+p)\}$ [C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$= 7 + 3p - 6 - 3p = 1 = \text{RHS}$

प्रश्न 15:

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix} = 0$$

उत्तर 15:

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta & \cos(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta & \cos(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta & \cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}$$ [$C_2 \to \cos\delta\, C_2 - \sin\delta\, C_1$ द्वारा]

$$= \begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos(\alpha+\delta) & \cos(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos(\beta+\delta) & \cos(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos(\gamma+\delta) & \cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}$$

$= 0 = \text{RHS}$ [$\because C_2 = C_3$]

प्रश्न 16:

निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$$
$$\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1$$
$$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2$$

उत्तर 16:

दी गई समीकरण निकाय:

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$$
$$\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1$$
$$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2$$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 10\\ 4 & -6 & 5\\ 6 & 9 & -20\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}1/x\\ 1/y\\ 1/z\end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$|A| = 2(120-45)-3(-80-30)+10(36+36) = 150+330+720 = 1200 \neq 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है।

अतः, A^{-1} का अस्तित्व है। इसलिए,

$A_{11} = 75$ $\quad$ $A_{12} = 110$ $\quad$ $A_{13} = 72$

$A_{21} = 150$ $\quad$ $A_{22} = -100$ $\quad$ $A_{23} = 0$

$A_{31} = 75$ $\quad$ $A_{32} = 30$ $\quad$ $A_{33} = -24$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\,A=\frac{1}{1200}\begin{bmatrix}75 & 150 & 75\\ 110 & -100 & 30\\ 72 & 0 & -24\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}1/x\\ 1/y\\ 1/z\end{bmatrix}=\frac{1}{1200}\begin{bmatrix}75 & 150 & 75\\ 110 & -100 & 30\\ 72 & 0 & -24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{x}\\ \frac{1}{y}\\ \frac{1}{z}\end{bmatrix}=\frac{1}{1200}\begin{bmatrix}300+150+150\\ 440-100+60\\ 288+0-48\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{x}\\ \frac{1}{y}\\ \frac{1}{z}\end{bmatrix}=\frac{1}{1200}\begin{bmatrix}600\\ 400\\ 240\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y}=\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{z}=\frac{1}{5} \qquad \Rightarrow x=2, y=3, z=5$$

निम्नलिखित प्रश्नों 17 से 19 में सही उत्तर का चुनाव कीजिए।

प्रश्न 17:

यदि a, b, c समान्तर श्रेढ़ी में हों तो सारणिक $\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ का मान होगा:

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) $2x$

उत्तर 17:

दिया है: $\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ 0 & 0 & 2(2b-a-c) \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ $[R_2 \to 2R_2 - (R_1 + R_3)$ द्वारा]

$= \begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ 0 & 0 & 0 \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ $\left[\because a, b, c \text{ समान्तर श्रेढ़ी में हैं, इसलिए } 2b = a + c\right]$

$= 0$ $\left[\because R_2 \text{ के सभी अवयव शून्य हैं}\right]$

अतः, विकल्प (A) सही है।

प्रश्न 18:

यदि x, y, z शून्येतर वास्तविक संख्याएँ हों तो आव्यूह $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है:

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर 18:

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

$|A| = x(yz - 0) - 0(0 - 0) + 0(0 - 0) = xyz \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है। इसलिए,

$A_{11} = yz$ $A_{12} = 0$ $A_{13} = 0$
$A_{21} = 0$ $A_{22} = xz$ $A_{23} = 0$
$A_{31} = 0$ $A_{32} = 0$ $A_{33} = xy$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{\mathrm{xyz}} \begin{bmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & xz & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$$

अतः, विकल्प (A) सही है।

प्रश्न 19:

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ $0 \le \theta \le 2\pi$ हो तो:

(A) $\det(A) = 0$ (B) $\det(A) \in (2, \infty)$

(C) $\det(A) \in (2, 4)$ (D) $\det(A) \in [2, 4]$.

उत्तर 19:

$A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$

$= 1(1 + sin^2\theta) + \sin\theta\,(-\sin\theta + \sin\theta) + 1(sin^2\theta + 1)$

$\left[C_1\right.$ के अनुदिश प्रसरण करने पर$\left.\right]$

$= 2(1 + sin^2\theta)$

दिया है: $0 \le \theta \le 2\pi$

$\Rightarrow 0 \le \sin\theta \le 1$

$\Rightarrow 0 \le sin^2\theta \le 1$

$\Rightarrow 1 \le 1 + sin^2\theta \le 2$

$\Rightarrow 2 \le 2(1 + sin^2\theta) \le 4$

$\Rightarrow \det(A) \in [2, 4]$

अतः, विकल्प (D) सही है।